試験科目：数学　［8 月 21 日　9 時 30 分～11 時 30 分］

受験番号

注意：
- １問につき解答用紙１枚を使用すること．
- 各解答用紙に問題番号を記入すること．

問 1　xy 平面上の方程式

$$(a-1)(x^2+y^2)+4xy-1=0 \tag{*}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，a は 1 以外の実数の定数とする．(50 点)

(1) $\boldsymbol{x}=[x,\ y]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$ とする．対称行列 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ を用いて与式 (*) を $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=1$ の形で表せ．ただし，行列 $\boldsymbol{A}$ の要素を具体的に示すこと．

(2) (1) で求めた行列 $\boldsymbol{A}$ の 2 つの固有値を λ_l，λ_s，$(\lambda_l>\lambda_s)$ とする．$\lambda_l=5$ であるとき，定数 a およびもう一つの固有値 λ_s をそれぞれ求めよ．

(3) (2) で求めた固有値 λ_s についての大きさ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2$，固有値 $\lambda_l=5$ についての大きさ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^2$ とする．行列 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}]\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ を求めよ．

(4) いま，(3) で求めた行列 $\boldsymbol{P}$ について，$\boldsymbol{X}=[X,\ Y]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$ とすると，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ が成立している．

i) 与式 (*) を X，Y を用いて表せ．

ii) i) で求めた方程式が，XY 平面上に描く図形を図示せよ．ただし，図形の形状を決める根拠となる値は図中で示すこと．

(5) 与式 (*) が，xy 平面上に描く図形を図示せよ．ただし，a は (2) で求めた値とし，図形の形状を決める根拠となる値は図中で示すこと．

問 2　以下に示す微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ．(50 点)

(1) $$\frac{dy(x)}{dx}=\frac{y(x)^3-3y(x)^2+2y(x)}{x(3y(x)^2-6y(x)+2)}$$

(2) $$\frac{dy(x)}{dx}=\frac{y(x)^2+2xy(x)}{x^2+xy(x)}$$

(3) $$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+y(x)=\cos x+\sin x$$

試験科目：数学　［8 月 21 日　9 時 30 分〜11 時 30 分］

受験番号

注意：
- １問につき解答用紙１枚を使用すること．
- 各解答用紙に問題番号を記入すること．

問３　$x^2 + y^2 \leq 4$ を満たす領域を D とする．以下の問いに答えよ．(50 点)

(1) 領域 D において，$x \geq 1$ を満たす領域を $D1$ とするとき，以下を計算せよ．

$$\iint_{D1} x dx dy$$

(2) 領域 D において，$x \geq 0, y \geq 0$ の領域を $D2$ とするとき，以下を計算せよ．

$$\iint_{D2} (x+y) dx dy$$

(3) 領域 D の境界を $C1$ とするとき，以下を計算せよ．

$$\oint_{C1} \{(x+y^2)dx - (x^2-y)dy\}$$

(4) $z = 4 - x^2 - y^2$ と $x + y + z = 1$ の切断面の境界を $C2$ とするとき，以下を計算せよ．

$$\oint_{C2} \{(z^2-y^2)dx + (x^2-z^2)dy + (y^2-x^2)dz\}$$

問４　３回の測定によって，X と Y という２つのスカラー量の組からなるデータ

$$(X_i, Y_i) = (0,1), (1,2), (2,5) \qquad (i = 1,2,3)$$

が得られたとする．X と Y との関係を説明するため，X の多項式 $f(X)$ で表される

$$Y = f(X)$$

というモデルを導入し，モデルとデータとの差の二乗和 S を以下に定義する．

$$S = \sum_{i=1}^{N} (f(X_i) - Y_i)^2$$

ここで N はデータ点数を表す．(50 点)

(1) モデル $Y = f_1(X)$ を以下の式で与えたとき，S を最小とする係数 a，b を求めよ．

$$f_1(X) = aX + b$$

(2) モデル $Y = f_2(X)$ を以下の式で与えたとき，S を最小とする係数 c，d を求めよ．

$$f_2(X) = cX^2 + d$$

(3) (1) および (2) で与えられた２つのモデルのうち，どちらのモデルがより優れているか答えよ．ここで優れたモデルとは，上記のデータによる S の最小値が小さなモデルを意味する．また，データ点と２つのモデルの概形をグラフにまとめて図示せよ．