試験科目：数学　［8 月 20 日 9 時 30 分〜11 時 30 分］

注意：
- 1 問につき解答紙 1 枚を使用すること．
- 各解答紙に問番号を記入すること．

受験番号 ____________

問 1　以下に示す微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ．
なお，積分定数は適宜定義してよい．(50 点)

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} - 5\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + 6y(x) = e^{2x}$

(2) $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} - 4x\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + 6y(x) = 0$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} - \left(\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 0$

問 2　連立漸化式 $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n - 2 \\ y_{n+1} = 3x_n + 2y_n - 4 \end{cases}$ について，以下の問いに答えよ．
ただし，n を自然数とする．(50 点)

(1) $\boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ として，この連立漸化式を $\boldsymbol{a}_{n+1} = A\boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{b}$ の形で表せ．
ここで，A は定数行列，$\boldsymbol{b}$ は定数ベクトルである．

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) A^n を計算せよ．

(4) $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ を求めよ．

試験科目：数学　［8 月 20 日 9 時 30 分〜11 時 30 分］

注意：
- 1 問につき解答紙 1 枚を使用すること.
- 各解答紙に問番号を記入すること.

受験番号 ____________________

問 3　C を初期位置が座標 $(0,\ r)$ を中心とする XY 平面上の半径 r の円とする．C は X 軸上を正方向へ滑ることなく角度 θ [rad] だけ転がるとする．P を C の円周上の点とし，C が初期位置にあるとき P は原点 $(0,\ 0)$ と一致する．以下の問いに答えよ. (50 点)

(1) P の座標 (x, y) を r と θ を用いて示せ.

(2) C が 1 回転するときの P の軌跡と X 軸に囲まれた面積を求めよ.

次に，XYZ 空間における S を座標 $(0,\ r,\ 0)$ を中心とする半径 $2r$ の球体とし，C' を $\theta = 1$ の時の C を底面とする Z 軸正方向に高さ $2r$ を持つ円柱とする．以下の問に答えよ.

(3) S および C' について，XY 平面への投影図を描け.

(4) S と C' が重なる空間の体積を求めよ.

問 4　以下の問いに答えよ．必要に応じて留数定理 $\displaystyle\oint f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_j \mathrm{Res}\ (a_j,\ f)$ を用いてよい．ここで，i は虚数，$\mathrm{Res}\ (a_j,\ f)$ は留数，a_j は特異点を表す. (50 点)

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ を求めよ.

(2) 恒等式 $\displaystyle\frac{1}{1+z^4} = \sum_j \frac{\delta_j}{z-\lambda_j}$ が成立するように，複素数の定数 δ_j，λ_j を定めよ.
ここで，λ_j は方程式 $z^4 = -1$ の解である.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ を求めよ.