

注意：● 1問につき解答紙1枚を使用すること。 受験番号 _____

● 各解答紙に問番号を記入すること。

問1 次の行列 A について、以下の問いに答えよ。(50点)

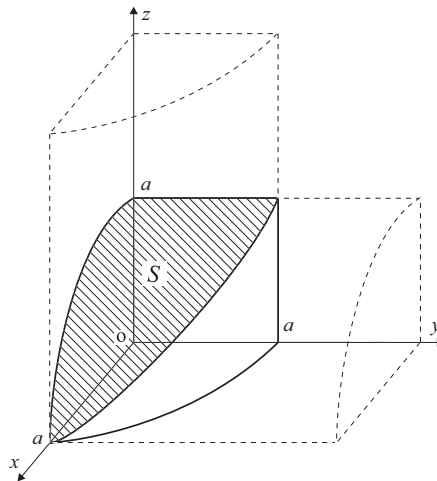
$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

- (1) 行列 A の固有値を全て求めよ。
- (2) (1) で求めた各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。
- (3) n を正の整数とすると、(1) および (2) の結果を用いて次の等式が成立する事を示せ。

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

問2 下図のような $x, y, z \geq 0$ の空間にある円柱 $A: x^2 + y^2 \leq a^2$ と円柱 $B: x^2 + z^2 \leq a^2$ の交差部である立体 V を考える。以下の問いに答えよ。(50点)

- (1) 立体 V の体積を求めよ。
- (2) 立体 V のうち、円柱 B の表面上にある曲面 S の面積を求めよ。
- (3) 曲面 S の重心 (x_0, y_0, z_0) を求めよ。
- (4) (3) で求めた重心 (x_0, y_0, z_0) の位置で、曲面 S に接する平面の方程式を求めよ。
- (5) (3) で求めた重心 (x_0, y_0, z_0) の位置での曲面 S の法線の方程式を求めよ。



注意：● 1問につき解答紙1枚を使用すること。 受験番号 _____

- 各解答紙に問番号を記入すること。

問3 以下に示す微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ。(50点)

$$(1) \frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$(2) \frac{d^2y(x)}{dx^2} + 4y(x) = \sin 2x$$

$$(3) \frac{dy(x)}{dx} = \frac{\cos^2 x - 5x^4 y(x)}{x^5 + 2}$$

問4 以下の問いに答えよ。(50点)

- (1) x, y が以下の関係式を満たす。ただし、 $x(0) > y(0) > 0, \alpha > 0, N > 0$ とする。

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha}{N}xy + f(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{N}xy - f(t)$$

$$N = x(0) + y(0)$$

- (1.1) $f(t) = 0$ のとき、 $x(\infty), y(\infty)$ を求めよ。

- (1.2) $f(t) = \beta y$ のとき、 $x(\infty), y(\infty)$ を求めよ。ただし、 $\beta > 0$ とする。

- (2) x, y, z が以下の関係式を満たす。ただし、 $x(0) > y(0) > z(0) = 0, \alpha > 0, \beta > 0, N > 0$ とする。

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha}{N}xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{N}xy - \beta y$$

$$\frac{dz}{dt} = \beta y$$

$$N = x(0) + y(0) + z(0)$$

- (2.1) $\frac{dy(0)}{dt} > 0$ を満たす条件を求めよ。

- (2.2) (2.1)の条件下で y の概略図を示せ。ただし、図中に代表値を記入すること。