試験科目：数学　［8 月 21 日 9 時 30 分〜11 時 30 分］

注意：
- １問につき解答紙１枚を使用すること．
- 各解答紙に問番号を記入すること．

受験番号

問１ ２次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が $A = A^2$ のとき，以下の問いに答えよ．(50 点)

(1) 行列 A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値の固有ベクトルを一つ求めよ．

(3) 行列 A は正方行列 P を用いて $P^{-1}AP$ で対角化される．$P^{-1}A^nP$ を求めよ．

(4) (3) で求めた結果を用いて A^n を求めよ．

問２ 以下の問いに答えよ．(50 点)

(1) 領域 $D = \{(x, y) : 0 < r_2^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2\}$ 内における以下の重積分を求めよ．
ただし，m は任意の実数とする．

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^m}$$

(2) xyz 空間内にある曲面 $z = xy$ について，領域 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2^2\}$ 内にある面積を求めよ．

(3) xyz 空間内にある以下の曲面，柱面，そして平面に囲まれた部分の体積を求めよ．

$$曲面\ x^2 + y^2 = z，柱面\ x^2 + y^2 = 2x，平面\ z = 0$$

試験科目：数学　［8 月 21 日　9 時 30 分〜11 時 30 分］

注意：
- １問につき解答紙１枚を使用すること．
- 各解答紙に問番号を記入すること．

受験番号

問 3 以下の微分方程式を解け．(50 点)

(1) $\cos^2 x - \cos x \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\sin x = 0$

(2) $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2x\left(y - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

問 4 以下の問いに答えよ．(50 点)

(1) xy 平面上の点群に対する近似２次多項式を最小２乗法により求めることを考える．近似２次多項式を $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ とおくと，m 個の点に対する最小２乗法では $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}(y_k - f(x_k))^2$ が最小になる，つまり，$\dfrac{\partial F}{\partial a_0} = \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = \dfrac{\partial F}{\partial a_2} = 0$ となるように a_0, a_1, a_2 を求めればよい．

ここで，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} y_k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} y_k x_k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} y_k x_k^2 \end{bmatrix}$ とおくと，$M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ が F を最小とする条件である．行列 M を求めよ．

(2) xy 平面上の点群 $A(-1,1),\ B(0,3),\ C(1,6),\ D(2,0)$ に関して以下の問いに答えよ．

(2-1) (1) で定義した行列 M を点群 A, B, C, D の場合で考えると $M = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}$ となるが，これは全ての要素が非負の下三角行列 L を用いて $M = LL^\top$ の形にコレスキー分解できる．ただし $\top$ は転置を表す．L を求めよ．

(2-2) 点群 A, B, C, D に対する近似２次多項式を最小２乗法により求めよ．