令和８年度 九州大学大学院工学府機械系専攻 修士課程入学試験 問題紙　１頁目（全２頁）
試験科目：数学 ［8 月 19 日 9 時 30 分〜11 時 30 分］

注意：● １問につき解答紙１枚を使用すること．
● 各解答紙に問番号を記入すること．

受験番号

問 1 次の行列 $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ について，以下の問いに答えよ．(50 点)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $AA^\top$ の固有値と正規化した固有ベクトルを求めよ．

(2) A は，正規直交基底を列に持つ $U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ と $V = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ を用いて，以下のように分解することができる．

$$A = U\Sigma V^\top, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

ただし，σ_1, σ_2 は正の実数であり，A の特異値と呼ぶ．このとき，以下の変換式が成り立つことを示せ．

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{\sigma_i} A^\top \boldsymbol{u}_i, \quad i = 1, 2$$

(3) $(*)$ の U，V，および A の特異値を求めよ．ただし，$\sigma_1 > \sigma_2$ とする．

問 2 以下の微分方程式の一般解を求めよ．(50 点)

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 10y = 2\sin 3x$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cos x + ye^x - y^2}{2xy - e^x}$

(3) $\left(x^2 + y^2 - 4\right)\left(x + y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 4xy\left(y - x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$

試験科目：数学 ［8月19日 9時30分〜11時30分］

注意：
- 1問につき解答紙1枚を使用すること．
- 各解答紙に問番号を記入すること．

受験番号

問3 以下の問いに答えよ．(50点)

(1) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

(2) 次の広義積分を計算せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}e^{-\frac{x^2}{\pi}}\mathrm{d}x$$

(3) D を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqq 1$（$a,b,c>0$）で定まる領域とする．

$I=\displaystyle\iiint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ を a,b,c を用いて求めよ．

問4 $f(t)$ のラプラス変換は $F(s)=\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ と表される．以下の問いに答えよ．(50点)

(1) $g(t)=\dfrac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}$ のラプラス変換 $G(s)$ を $F(s), f(0), \dfrac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}t}$ を用いて求めよ．ここで，s はラプラス変換の収束域にあるとする．

(2) $f(t)=e^{kt}+te^{kt}$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ．ここで，$\mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[k]$ とする．

(3) 以下の連立微分方程式の初期値問題について $x(t)$, $y(t)$ のラプラス変換 $X(s)$, $Y(s)$ を求めよ．

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= 2x(t)-y(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -x(t)+2y(t)+3e^t-e^{2t},\end{cases}\quad x(0)=y(0)=0,\ \frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}t}=1.$$

(4) (3) の微分方程式の解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．